Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Rabat

27 Mai 2016
SMPC2

Examen d'Analyse
Durée : 1h30min
Toutes les réponses devront être justifiées

Exercice 1 :(5 points)

1. Calculer la limite de la suite $U_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k+n}$.
2. Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{x-2}{(x-3)^2} dx$.
3. En déduire les valeurs de $J = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x} - 2e^x}{(e^x-3)^2} dx$ et $K = \int_e^{e^2} \frac{\ln(x) - 2}{x(\ln(x)-3)^2} dx$.

Exercice 2 :(5 points)

Soit f la fonction ainsi définie :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{a^2+x^2}, \quad \text{avec } a > 0$$

1. Déterminer : $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x)$ et $\lim_{x \to 0} x^{\frac{1}{2}} f(x)$.
2. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2} dx$ converge.
3. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$. (Poser $x = \frac{1}{u}$)
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{a^2+x^2} dx = \frac{\pi \ln(a)}{2a}$.

Exercice 3 :(5 points)

1. Résoudre l'équation différentielle du premier ordre :
$$(x^2+1)y' - xy = \sqrt{x^2+1}$$
2. Résoudre l'équation différentielle du second ordre :
$$y'' - 2y' + 10y = e^x + \sin(3x)$$

Exercice 4 :(5 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? justifier votre réponse.
4. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? justifier votre réponse.

Correction d'analyse SMPC
2015-2016..

Exercice 1:

1/ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}+1}$

on prend $a=0$ $\Rightarrow$ $b=1$.
on a $b-a=1$

on considère la fonction $f(x)=\sqrt{x+1}$ définie sur $[0,1]$.
on a f est continue sur $[0,1]$. donc d'après les sommes de Riemann; $\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{x+1}\, dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_0^1$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}$$

2/ $I = \int_1^2 \frac{x-2}{(x-3)^2}\, dx = \int_1^2 \frac{x-3}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x-3)^2}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}\, dx$

$= \left[\ln|x-3| - \frac{1}{x-3}\right]_1^2 = \frac{1}{2} - \ln(2).$

donc $\boxed{I = \frac{1}{2} - \ln(2)}$.

3/ on pose $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$.
quand $x = 0 \Rightarrow t = 1$
$x = \ln(2) \Rightarrow t = 2$

$J = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x - 2}{(e^x-3)^2} e^x dx = \int_1^2 \frac{t-2}{(t-3)^2} dt = I$

donc $\boxed{J = \frac{1}{2} - \ln(2)}$

on pose $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.
quand $x = e \Rightarrow t = 1$
$x = e^2 \Rightarrow t = 2$.

$K = \int_e^{e^2} \frac{\ln(x) - 2}{x(\ln x - 3)^2} dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x - 2}{(\ln x - 3)^2} \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{t-2}{(t-3)^2} dt = I$

donc $\boxed{K = \frac{1}{2} - \ln(2)}$.

Exercice 2 :

$$f(x) = \frac{\ln x}{a^2 + x^2} \quad \text{avec } a > 0.$$

1/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2} \dfrac{\ln x}{x^2\left(\frac{a^2}{x^2}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}\left(\frac{a^2}{x^2}+1\right)} = 0.$

$\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{\frac{1}{2}} \ln x}{a^2+x^2} = 0.$

2/ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx.$

en 0 :

on a $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}} \dfrac{\ln x}{a^2+x^2} = 0$ donc $\dfrac{\ln x}{a^2+x^2} \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{1/2}}\right)$

et comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ est convergente car $\frac{1}{2} < 1$.

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx$ est convergente.

en $+\infty$:

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}} \dfrac{\ln x}{a^2+x^2} = 0$ donc $\dfrac{\ln x}{a^2+x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$

et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ est convergente car $\frac{3}{2} > 1$.

donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx$ est convergente

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx$ est convergente

3/ On pose $x = \dfrac{1}{u} \Rightarrow dx = -\dfrac{1}{u^2}\,du.$

quand $x = 0 \Rightarrow u \to +\infty$

$x = 1 \Rightarrow u = 1$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_{+\infty}^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{-du}{u^2} = \int_1^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+u^2}\,du$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$

4/ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}\,dx.$

on pose $t = \frac{x}{a} \Rightarrow dt = \frac{1}{a}\,dx.$

quand $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(at)}{a^2(1+t^2)}\,a\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(a)+\ln(t)}{1+t^2}\,dt$$

$$= \frac{\ln(a)}{a}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt.$$

comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0.$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\ln(a)}{a}\Big[\mathrm{Arctg}\,(t)\Big]_0^{+\infty}$

Par conséquent $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi \ln(a)}{2a}}$

3

Exercice 3 :

1/ $(x^2+1)y' - xy = \sqrt{x^2+1}$

1ère étape : $(x^2+1)y' - xy = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+1)\frac{dy}{dx} = xy$

$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + K.$

$\Leftrightarrow \boxed{y_0 = A\sqrt{x^2+1} \ ; \ A \in \mathbb{R}}$

2ème étape : par la méthode de la variation de la constante.

$y_p = A(x)\sqrt{x^2+1}$

$y'_p = A'(x)\sqrt{x^2+1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}A(x)$

$(x^2+1)y'_p - xy_p = \sqrt{x^2+1}$

$(x^2+1)\left[A'(x)\sqrt{x^2+1} + \frac{A(x)x}{\sqrt{x^2+1}}\right] - xA(x)\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$

$(\sqrt{x^2+1})^{3/2}A'(x) + A(x)\cancel{x}\sqrt{x^2+1} - \cancel{xA(x)\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$

$A'(x) = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow A(x) = \text{Arctg}\,x + C.$

donc $\boxed{y_p = (\text{Arctg}(x) + C)\sqrt{x^2+1} \ ; \ C \in \mathbb{R}}$

La solution générale est :

$y_G = y_0 + y_p = A\sqrt{x^2+1} + C\sqrt{x^2+1} + \text{Arctg}(x)\sqrt{x^2+1}$

$A, C \in \mathbb{R}$

donc $\boxed{y_G = (\lambda + \text{Arctg}(x))\sqrt{x^2+1} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}}$

2/ $y'' - 2y' + 10y = e^{x} + \sin(3x)$.

$1^{ère}$ étape : $y'' - 2y' + 10y = 0$

(EC) : $r^2 - 2r + 10 = 0$

$\Delta = 4 - 40 = -36 = (6i)^2$

$r_1 = \frac{2+6i}{2} = 1 + 3i$

$r_2 = \frac{2-6i}{2} = 1 - 3i$

donc $\boxed{y_0 = e^{x}(\lambda_1 \cos(3x) + \lambda_2 \sin(3x)) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.}$

$2^{ème}$ étape : $y'' - 2y' + 10y = e^{x}$.

comme 1 n'est pas racine de EC

donc $y_{P_1} = Ae^{x}$; $y'_{P_1} = Ae^{x}$ et $y''_{P_1} = Ae^{x}$.

$Ae^{x} - 2Ae^{x} + 10Ae^{x} = e^{x} \Leftrightarrow 9A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{9}$

donc $\boxed{y_{P_1} = \frac{1}{9}e^{x}}$

$3^{ème}$ étape : $y'' - 2y' + 10y = \sin(3x)$.

comme $3i$ n'est pas racine de (EC)

donc $y_{P_2} = A\cos(3x) + B\sin(3x)$

$y'_{P_2} = -3A\sin(3x) + 3B\cos(3x)$

$y''_{P_2} = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$.

$-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) + 6A\sin(3x) - 6B\cos(3x)$

$+10A\cos(3x) + 10B\sin(3x) = \sin(3x)$.

$(A - 6B)\cos(3x) + (B + 6A)\sin(3x) = \sin(3x)$

$\begin{cases} A - 6B = 0 \\ 6A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 6B \\ 37B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{37} \\ A = \frac{6}{37} \end{cases}$

donc $\boxed{y_{P_2} = \frac{6}{37}\cos(3x) + \frac{1}{37}\sin(3x)}$

La solution générale est :

$$\boxed{y_G = e^{x}(\lambda_1 \cos(3x) + \lambda_2 \sin(3x)) + \frac{1}{9}e^{x} + \frac{6}{37}\cos(3x) + \frac{1}{37}\sin(3x) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.}$$

Exercice 4 :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1/ on a : f est continue sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$.

en $(0,0)$: on a : $|x|\leq\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2\leq x^2+y^2$.

$|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$

donc $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leq\dfrac{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$

donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$.

donc f est continue en $(0,0)$.

D'où : f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2/ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2xy(x^2+y^2)-x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x^2(x^2+y^2)-x^2y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^4+x^2y^2-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{0-0}{h}=0.$

donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{0-0}{k}=0.$

donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.}$

3/ f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$
en tant qu'une fraction rationnelle
ayant un dénominateur non nul
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$
donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$.

4/ en $(0,0)$:
on considère le chemin $(x,y) = (x,x)$.

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{2x^4}{(2x^2)^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

on considère le chemin $(x,y) = (0,y)$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0 \neq \frac{1}{2}.$$

donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'existe pas.

donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

donc f n'est pas de classe C^1 en $(0,0)$.

donc f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.